جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

بنام خدا

ماخ

دفترچه سوالات و پاسخ تشریحی
مرحله دوم
پانزدهمین دوره‌ی المپیاد ریاضی سال ۱۳۷۶

مدت آزمون (دقیقه)	تعداد سوالات	
	مساله‌های تشریحی	سوالات چند گزینه‌ای
۳۶۰	۶	-

توضیحات مهم | **استفاده از ماشین‌حساب در این آزمون مجاز نیست.**

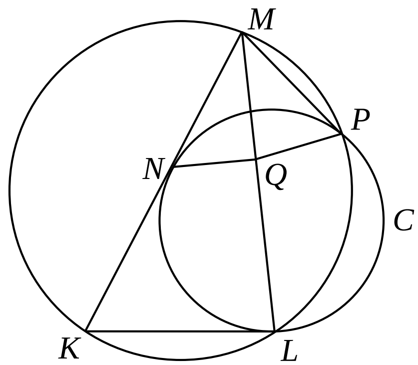
تذکرات آزمون:

ضمن آرزوی موفقیت برای شما دانش‌پژوه گرامی، خواهشمند است قبل از پاسخ به سؤالات آزمون به موارد زیر توجه کنید:

- این آزمون شامل **۶ مسأله‌ی تشریحی** و وقت آن **۳۶۰ دقیقه** است.
- استفاده از ماشین‌حساب در این آزمون غیر مجاز است.
- همراه داشتن تلفن همراه (حتی خاموش) در طول زمان آزمون مجاز **نیست**.
- فقط داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سؤالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته باشند.
- انتشار و بازتولید این سوالات توسط **کمیته‌ی اجرایی ماخ** انجام شده است.

۱- اگر x و y دو عدد طبیعی باشند به‌طوری که داشته باشیم: $۳x^۲ + x = ۴y^۲ + y$، آنگاه ثابت کنید که $x - y$ یک مربع کامل است.

۲- فرض کنید KL و KN بر دایره C مماس باشند. M نقطه‌ای در امتداد KN بوده و P نقطه دیگر تقاطع دایره C با دایره محیطی مثلث KLM است. Q را پای عمود واصل از N بر ML می‌گیریم. ثابت کنید: $\angle MPQ = ۲\angle KML$.



۳- یک جدول $n \times n$ از اعداد ۰، ۱+ و ۱- داریم به‌طوری که در هر سطر و ستون فقط یک عدد ۱+ و یک عدد ۱- وجود دارد. ثابت کنید با تعدادی متناهی جابه‌جایی سطرها با یکدیگر و ستونها با یکدیگر می‌توان جای ۱+ ها را با ۱- ها عوض کرد.

۴- فرض کنید $x_۱, x_۲, x_۳$ و $x_۴$ چهار عدد حقیقی مثبت باشند که $x_۱x_۲x_۳x_۴ = ۱$.
ثابت کنید:

$$\sum_{i=۱}^{۴} x_i^۳ \geq \max\left\{\sum_{i=۱}^{۴} x_i, \sum_{i=۱}^{۴} \frac{۱}{x_i}\right\}$$

($max \quad a,b$ یعنی بزرگترین عضو مجموعه‌ی a,b).

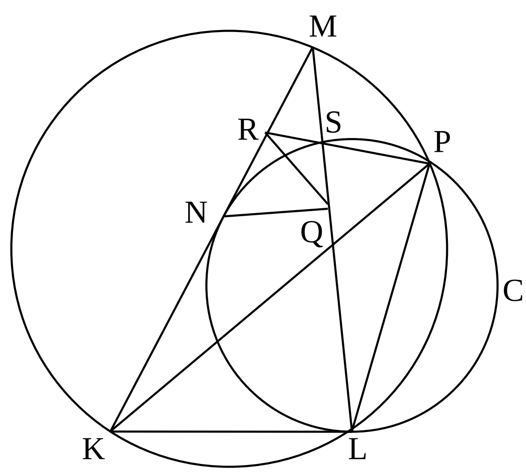
۵- در مثلث ABC زاویه‌های B و C حاده‌اند. ارتفاع خارج شده از رأس A ضلع BC را در نقطه‌ی D قطع می‌کند. همچنین فرض کنید نیمسازهای دو زاویه‌ی B و C ارتفاع AD را به ترتیب در نقاط E و F قطع کنند. ثابت کنید: اگر $BE = CF$، آنگاه مثلث ABC متساوی الساقین است.

۶- اگر a و b دو عدد طبیعی باشند و $p = \frac{b}{۴}\sqrt{\frac{۲a - b}{۲a + b}}$ یک عدد اول باشد، بزرگترین مقدار p را با ذکر دلیل، پیدا کنید.

پاسخ نامه تشریحی

۱- معادله هم ارز است با $۳(x^۲-y^۲)+(x-y)=y^۲$ و یا
$$(x-y)(۳(x-y)+۶y+۱)=y^۲$$
قرار می‌دهیم $d=(x-y,۳(x-y)+۶y+۱)$. اگر $p,d>۱$ را عدد اولی در نظر بگیرید که $p\mid d$. چون $p\mid x-y$، از رابطه قبل داریم $p\mid y^۲$ و از آنجا $p\mid y$. درنتیجه $p\mid ۳(x-y)+۶y$ و چون $p\mid d$، پس $p\mid ۳(x-y)+۶y+۱$. بنابراین، $p=۱$ که غیرممکن است. پس $d=۱$. در این صورت چون بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک $۳(x-y)+(۶y+۱)$ و $(x-y)$ برابر یک است و حاصل‌ضرب این دو عدد مربعی کامل است بنابراین هر دو مربع کامل‌اند و این حکم را ثابت می‌کند.

۲- فرض کنید S نقطه تقاطع دوم خط ML با دایره C و R نقطه تقاطع امتداد SP با MN باشد.



توجه کنید که
$$\angle KPL=\angle KLM=\angle LPS$$
و
$$\angle SPM=\angle LPK=\angle KML$$
بنابراین، دایره محیطی مثلث SMP بر KM در M مماس است. پس،
$$(RM)^۲=RS.RP=(RN)^۲$$
بنابراین، $RN=RM$؛ یعنی R وسط MN و مرکز دایره محیطی مثلث MNQ است. درنتیجه،
$$\angle MPS=\angle SMR=\angle MQR$$
پس M، R، P و Q روی یک دایره قرار دارند و بنابراین،
$$\angle MPQ=\angle MPS+\angle RPQ=\angle KML+\angle KML=۲\angle KML$$

۳- حکم را به استقرا روی n ثابت می‌کنیم. حکم به ازای $n=۲$ بدیهی است. فرض کنیم حکم به ازای عددهای طبیعی کوچکتر از n درست باشد. درایه واقع در سطر a و ستون b جدول را با $A(a,b)$ نشان می‌دهیم. حال دنباله‌های α_i و β_i از اعداد طبیعی با شرط $۱\le\alpha_i\le n$ و $۱\le\beta_i\le n$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$A(\alpha_1,\beta_1)=-1,\qquad A(\alpha_i,\beta_i)=-1,\qquad A(\alpha_{i+1},\beta_i)=1$$

(چون در هر سطر و هر ستون فقط یک عدد ۱ و یک عدد ۱- وجود دارد α_iها و β_iها به طور یکتا تعریف می‌شوند) اما چون عضوهای دنباله a_i فقط n مقدار متمایز را می‌توانند اختیار کنند، عددهای طبیعی k و e به طوری $e<k$ وجود دارند که $\alpha_k=\alpha_e$. در این صورت، از

$$A(\alpha_k,\beta_{k-1})=A(\alpha_e,\beta_{e-1})=1$$

نتیجه می‌شود $\beta_{k-1}=\beta_{e-1}$ و سپس از

$$A(\alpha_{k-1},\beta_{k-1})=A(\alpha_{e-1},\beta_{e-1})=1$$

نتیجه می‌شود $\alpha_{e-1}=\beta_{e-1}$ و به همین ترتیب می‌توانیم ادامه دهیم و ثابت کنیم $\alpha_1=\alpha_{k-e+1}$ و $\beta_1=\beta_{k-e+1}$.

حال اگر $k-e<n$ حکم با استقرا درست است.

اگر $k-e=n$ آنگاه $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ و $\beta_1,\dots,\beta_n$ جایگشتی از شماره سطرها و ستونهای جدول‌اند. پس کافی است سطرهای جدول را طوری جابه‌جا کنیم که دنباله $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ به دنباله $\alpha_1,\alpha_n,\alpha_{n-1},\dots,\alpha_2$ تبدیل شود و سپس ستونهای جدول را طوری جابه‌جا کنیم که دنباله $\beta_1,\dots,\beta_n$ به دنباله $\beta_n,\beta_{n-1},\dots,\beta_1$ تبدیل شود.

۴- ماخ توجه کنید که

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{4}x_i^3&=\frac{1}{3}(x_1^3+x_2^3+x_3^3)+\frac{1}{3}(x_1^3+x_2^3+x_4^3)\\&=\frac{1}{3}(x_1^3+x_3^3+x_4^3)+\frac{1}{3}(x_2^3+x_3^3+x_4^3)\end{aligned}$$

بنابر نامساوی میانگین حسابی – هندسی

$$\frac{x_1^3+x_2^3+x_3^3}{3}\geq\sqrt[3]{x_1^3+x_2^3+x_3^3}=\frac{1}{x_4}$$

به همین ترتیب با اعمال این نامساوی بر جمله‌های دیگر مجموع $\sum_{i=1}^{4}x_i^3$، نتیجه می‌شود ؟؟؟

$$\sum_{i=1}^{4}x_i^3\geq\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{x_i}$$

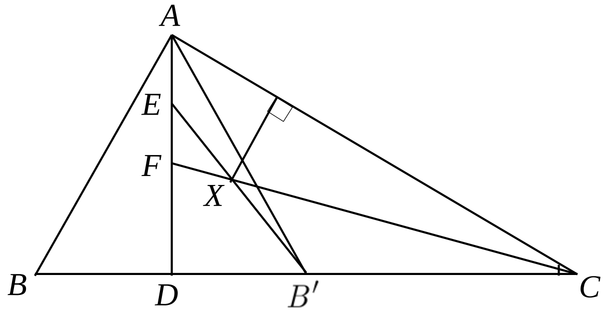
برای اثبات قسمت دیگر، با توجه به نامساوی توانی می‌توانیم بنویسیم

$$\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}x_i^3\geq\left(\frac{\sum_{i=1}^{4}x_i}{4}\right)^3$$

که هم ارز است با $\sum x_i^3\geq\frac{1}{16}(\sum x_i)^3$. پس کافی است ثابت کنیم $(\sum_{i=1}^{4}x_i)^3\geq 16\sum_{i=1}^{4}x_i$. چون $\sum_{i=1}^{4}x_i>0$ پس باید ثابت کنیم $\sum_{i=1}^{4}x_i\geq 4$ و این نیز با توجه به نامساوی حسابی - هندسی و تساوی $\prod_{i=1}^{4}x_i=1$ روشن است.

۵- ماخ از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض کنید مثلث ABC متساوی‌الساقین نباشد، مثلاً $AB<AC$. در این صورت $BD<CD$. پس اگر B' قرینه B نسبت به D باشد، B' بین D و C خواهد بود.

نقطه E نمی‌تواند بین F و D باشد زیرا در این صورت نتیجه می‌شود $B'E<CE\leq CF$



و چون $BE=B'E$ می‌توان نتیجه گرفت $BE<CF$ است که خلاف فرض است. پس E بین A و F است. درنتیجه دو پاره‌خط EB' و FC یکدیگر را در نقطه‌ای مانند X قطع می‌کنند. X روی نیمساز $\angle C$ است. پس X از AC و DC به یک فاصله است. ضمناً X روی نیمساز $\angle AB'D$ قرار دارد. پس از $\angle AB'$ و DC نیز به یک فاصله است. ولی این ناممکن است زیرا اگر از X به AC عمود کنیم، خط عمود خارج شده از X قبل از برخورد با AC، AB' را قطع می‌کند. پس فاصله X تا AC بیشتر از فاصله X تا AB' است. ولی بنابر استدلال بالا این دو فاصله باید برابر باشند.

۶- روشن است که b عددی زوج است. اگر $b=۲c$ آنگاه $p=\sqrt[\frac{c}{۲}]{\frac{a-c}{a+c}}$. یعنی $\frac{۴p^۲}{c^۲}=\frac{a-c}{a+c}$. قرار می‌دهیم $\frac{۴p^۲}{c^۲}=\frac{m^۲}{n^۲}$ که $(m,n)=۱$. حال اگر $(a-c,a+c)=k$ آنگاه خواهیم داشت $a+c=km^۲$ و $a-c=kn^۲$.

پس $۲c=k(n^۲-m^۲)$ و چون داشتیم $۲p=\frac{cm}{n}$، نتیجه می‌شود $۴p=\frac{k(n^۲-m^۲)m}{n}$.

حال m و n یا هر دو فردند یا فقط یکی از آنها فرد است. اگر m و n هر دو فرد باشند آنگاه $۸\mid n^۲-m^۲$. پس $۸\mid ۴p$. پس $p=۲$. اگر m و n دارای زوجیت متفاوت باشند از رابطه $۲c=k(n^۲-m^۲)$ نتیجه می‌شود که k زوج است. پس $k=۲r$. و چون $(n^۲-m^۲,n)=۱$ نتیجه می‌شود $n\mid k$. پس $r=ns$. بنابراین، $۲p=s(n-m)(n+m)$. اما $۲p$ فقط به دو شکل به صورت حاصل‌ضرب چهار عدد صحیح نوشته می‌شود (ترتیب را در نظر نمی‌گیریم)

$$۲p=۲p\times۱\times۱\times۱,\qquad ۲p=p\times۲\times۱\times۱$$

حال اگر

$$(n-m)(n+m)m=۲p\times۱\times۱\times۱$$

آنگاه چون $n+m>m$ پس $n+m=۲p$ بنابراین، $m=۱,n+m=۲p$ و $n-m=۱$. پس $n+m=۳\neq۲p$.
درنتیجه، در این حالت نمی‌توانیم داشته باشیم $n+m=۲$ زیرا در این صورت نتیجه می‌شود $n=m=۱$ و $n-m=۰$ که ناممکن است. پس $n+m=p$. اگر $m=۲$ و $n-m=۱$ آنگاه $p=۵$ و اگر $n-m=۱m=۱$ نتیجه می‌شود $p=۳$ و به ازای $n-m=۲$ نتیجه می‌شود $p=۴$ که ممکن نیست. پس $p=۵$ بزرگترین مقدار p است.